CAPÍTULO 8

REGRA DA CADEIA (UM CASO PARTICULAR)

8.1 Introdução

Em Cálculo 1A, aprendemos que, para derivar a função $h(x) = (x^2 - 3x + 2)^{37}$, o mais sensato é fazer uso da *regra da cadeia*. A *regra da cadeia* que é uma das mais importantes regras de derivação e nos ensina a calcular a derivada de funções compostas, como é o caso da função h apresentada anteriormente. De fato, podemos escrever que

$$h(x) = f(g(x)),$$

onde

$$f(u) = u^{37} \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^2 - 3x + 2.$$

Nesta aula, vamos enunciar uma pequena extensão da regra da cadeia estudada em Cálculo 1A. Esta extensão trata-se do caso em que f é uma função escalar de várias variáveis e g é uma função vetorial de uma variável real. Mais tarde, ao estudarmos as funções vetoriais de várias variáveis, veremos que esta pequena extensão da regra da cadeia nada mais é do que um caso particular da regra da cadeia para funções vetoriais de várias variáveis.

A seguir, vamos recordar o enunciado da regra da cadeia para funções da reta na reta.

TEOREMA 8.1.1: (Regra da Cadeia - Funções da Reta na Reta - Lembrança de Cálculo 1A) Considere as funções $f : Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : Dom(g) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Suponha que f é diferenciável no intervalo aberto $J \subseteq Dom(f) \subseteq \mathbb{R}$ e que a função g é diferenciável no intervalo aberto $I \subset Dom(g)$. Além disso, suponha que $g(t) \in J$, para todo $t \in I \subset Dom(g)$. Nestas condições, a função $f \circ g$ é diferenciável em I e

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t))g'(t), \quad t \in I.$$

Um exemplo simples em que desejamos derivar a composta de uma função escalar de várias variáveis com uma função vetorial de uma variável real, trata-se de quando queremos avaliar o comportamento de uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ao longo de uma determinada curva C contida no plano. De fato, se C for parametrizada por $g(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$ estamos de fato interessados em estudar o comportamento da composta $f \circ g$, que é dada por $f(g(t)) = f(x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Em um exemplo real, f poderia fornecer a temperatura em pontos do plano e C representar um caminho ao longo do qual gostaríamos de avaliar o comportamento da temperatura. Vamos portanto aprender a regra da cadeia para este caso particular de funções compostas.

8.2 Um Caso Particular da Regra da Cadeia

TEOREMA 8.2.1: (Regra da Cadeia - Para a composta de uma função escalar de várias variáveis com uma função vetorial de uma variável real) Considere as funções $f : Dom(f) \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ e $g : Dom(g) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$. Suponha que f é diferenciável no aberto $A \subseteq Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^p$ e que a função g é diferenciável no intervalo aberto $I \subset Dom(g) \subseteq \mathbb{R}$. Além disso, suponha que $g(t) \in A$, para todo $t \in I \subset Dom(g)$. Nestas condições, a função $f \circ g$ é diferenciável em I e

$$(f \circ g)'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot \vec{g}\,'(t), \quad t \in I,$$

onde $(\cdot)$ é o produto escalar e $\vec{g}\,'(t)$ é o vetor derivada de g em t.

Para ilustrar, considere as funções diferenciáveis f e g dadas abaixo, dadas por

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X = (x_1, x_2, ..., x_p) & \mapsto & f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_p) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \mapsto & g(t) = (g_1(t), g_2(t), ..., g_p(t)) \end{array},$$

onde f é diferenciável no aberto $A \subseteq Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^p$, g é diferenciável no intervalo aberto $I \subset Dom(g) \subseteq \mathbb{R}$ e $g(t) \in A$, para todo $t \in I \subset Dom(g)$.

Neste caso, a composta $f \circ g$ é a função real de uma variável real dada por

$$\begin{array}{rcl} f \circ g : I \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f \circ g(t) = f(g_1(t), g_2(t), ..., g_p(t)) \end{array}.$$

Além disto,

$$\nabla f(X) = \left(\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(X), \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_p}(X) \ \right), X \in A$$

e

$$\vec{g}\,'(t) = \left(\ g_1'(t), \quad g_2'(t), \quad \ldots, \quad g_p'(t) \ \right), t \in I.$$

Desta forma, pela regra da cadeia para este caso particular, dada no Teorema 8.2.1, temos que $f \circ g$ é diferenciável para todo $t \in I$ é $(f \circ g)'$ é dada por

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(t) &= \nabla f(g(t)) \cdot \vec{g}\,'(t) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t)), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(t)), \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_p}(g(t)) \right) \cdot \left(\; g_1'(t), \quad g_2'(t), \quad \ldots, \quad g_p'(t) \; \right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t))g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(t))g_2'(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(g(t))g_p'(t), \quad t \in I. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Fazendo agora $p = 2$, temos que

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X = (x, y) & \mapsto & f(X) = f(x, y) \end{array},$$

$$\begin{array}{rcl} g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & g(t) = (x(t), y(t)) \end{array},$$

onde f é diferenciável no aberto $A \subseteq Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2$, g é diferenciável no intervalo aberto $I \subset Dom(g) \subseteq \mathbb{R}$ e $g(t) \in A$, para todo $t \in I \subset Dom(g)$,

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(x(t), y(t)),$$

$$f'(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right), (x, y) \in A,$$

$$g'(t) = \left(\; x'(t), \quad y'(t) \; \right), t \in I,$$

e

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(t) &= \nabla f(g(t)) \cdot \vec{g}\,'(t) = \nabla f(x(t), y(t)) \cdot \left(\; x'(t), \quad y'(t) \; \right) = \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \right) \cdot \left(\; x'(t), \quad y'(t) \; \right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t), \quad t \in I. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Observação 8.2.1: Para facilitar a memorização, podemos expressar em palavras o resultado obtido em (2) como:

$(f \circ g)'(t_0)$= "derivada parcial de f com respeito a sua primeira variável (avaliada em $g(t)$) VEZES a derivada da função que ocupa a posição da primeira variável MAIS derivada parcial de f com respeito a sua segunda variável (avaliada em $g(t)$) VEZES a derivada da função que ocupa a posição da segunda variável."

Exemplo 8.2.1: Sejam $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{5}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $g(t) = (t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Considere a composta $h(t) = f(g(t))$.

a) Determine $h(t)$.

b) Calcule $h'(t)$ diretamente da função h encontrada no item (a) e verifique que de fato $h'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot \vec{g}\,'(t)$.

c) Mostre que $h(t)$ é a imagem da função f dos pontos pertencentes à reta $y = 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Esboce a curva C, imagem da função $\beta(t) = (t, 2t, h(t))$, $t \in \mathbb{R}$.

e) Determine a equação da reta tangente à curva C no ponto $(1, 2, 1)$.

Solução:
a) Como $h(t) = f(g(t))$, temos que

$$h(t) \;=\; f(t, 2t) = \frac{t^2 + 4t^2}{5} = t^2.$$

b) Calculando $h'(t)$ a partir da função encontrada no item (a), temos que

$$h'(t) \;=\; 2t.$$

Vamos agora verificar que $h'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot \vec{g}\,'(t)$. Como $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{5}$, temos que

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{2x}{5} \;, \frac{2y}{5}\right),$$

de modo que

$$\nabla f(g(t)) = \nabla f(x(t), y(t)) = \left(\frac{2x(t)}{5} \;, \frac{2y(t)}{5}\right) = \left(\frac{2t}{5} \;, \frac{4t}{5}\right).$$

Além disso, como $g(t) = (t, 2t)$, temos que $\vec{g}\,'(t) = (1 \;\;, 2)$, de modo que é fácil verificar que

$$\begin{aligned} h'(t) &= \nabla f(g(t)) \cdot \vec{g}\,'(t) \\ &= \left(\frac{2t}{5} \;, \frac{4t}{5}\right) \cdot (1 \;,\; 2) \\ &= \frac{2t}{5} + 2\,.\,\frac{4t}{5} = \frac{10t}{5} = 2t. \end{aligned}$$

c) Vamos chamar de $Im_l(f)$ o conjunto imagem de f dos pontos pertencentes à reta $y = 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Isto é,

$$Im_l(f) = \{f(x, y) \in \mathbb{R} \,|\, y = 2x, x \in \mathbb{R}\}.$$

Sabemos que a reta $y = 2x$, $x \in \mathbb{R}$, na forma paramétrica, pode ser escrita por

$$(x, y) = (t, 2t), \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} l &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 2x, x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(t, 2t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Sendo assim, segue que

$$\begin{aligned} Im_l(f) &= \{f(t,2t) \in \mathbb{R} \,|\, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{h(t) \in \mathbb{R} \,|\, t \in \mathbb{R}\} \\ &= Im(h), \end{aligned}$$

uma vez que $h(t) = f(g(t)) = f(t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Temos, portanto, que $h(t)$, $t \in \mathbb{R}$, é a imagem da função f dos pontos pertencentes a reta $y = 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

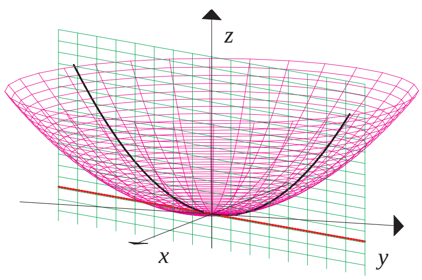
d) Pelo item anterior, temos que a curva C é a curva contida no gráfico da função f dada pela interseção do gráfico da função f com o plano $y = 2x$, uma vez que a coordenada z de um ponto arbitrário $(x, y, z) \in C$ é a imagem de f do ponto (x, y) que pertencente a reta $y = 2x$. De fato, a curva C, parametrizada pela função $\beta(t) = (t, 2t, f(t, 2t))$, $t \in \mathbb{R}$, é tal que $y = 2x$, $x \in \mathbb{R}$, e $z = f(t, 2t)$ e, lembrando que

$$Gr(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\},$$

temos que $\beta(t) = (t, 2t, f(t, 2t)) \in Gr(f)$, $t \in \mathbb{R}$. Além disso, conforme observado, um ponto (x, y, z) em C, i.e. é tal que $x(t) = t$ e $x(t) = t$, para algum $t \in \mathbb{R}$, de modo que $y = 2x$, $x \in \mathbb{R}$, o que significa que $\beta(t) = (t, 2t, f(t, 2t))$ pertecence ao plano $y = 2x$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sendo assim, $\beta(t)$, pertence á interseção do plano $y = 2x$ com o gráfico f, para todo $t \in \mathbb{R}$. Por outro lado, o conjunto de pontos da interseção do plano $y = 2x$ com o gráfico f é escrito como

$$\begin{aligned} & \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \cap \{(t, 2t, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} \\ = \; & \{(t, 2t, f(t, 2t)) \in \mathbb{R}^3 \,|\, t \in \mathbb{R}\} \\ = \; & \{\beta(t) \in \mathbb{R}^3 \,|\, t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Com isto, temos que C é a curva contida no gráfico da função f dada pela interseção do gráfico da função f com o plano $y = 2x$, esboçada abaixo.

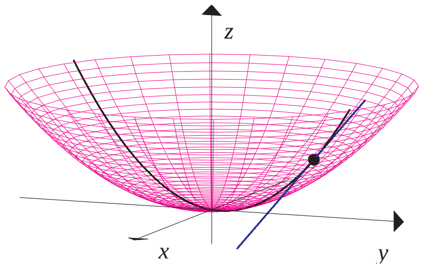


e) Observe que o ponto $(1, 2, 1)$ corresponde a $t_0 = 1$, pois $\beta(t_0) = (t_0, 2t_0, h(t_0)) = (1, 2, 1)$ se e só se $t_0 = 1$. Desta forma, temos que a equação da reta tangente à curva C no ponto $\beta(1)$ é dada por

$$(x, y, z) = \beta(1) + \lambda \vec{\beta}\,'(1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Observe que $\vec{\beta}\,'(t) = (1, 2, h'(t)) = (1, 2, 2t)$, de modo que $\vec{\beta}\,'(1) = (1, 2, h'(1)) = (1, 2, 2)$. Sendo assim, a equação da reta tangente à curva C no ponto $\beta(1) = (1, 2, 1)$ é dada por

$$(x, y, z) = (1, 2, 1) + \lambda(1, 2, 2), \lambda \in \mathbb{R}.$$



♡

Exemplo 8.2.2: Sejam $f(x, y) = e^{xy}$ e $\gamma(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t)$. Considere a composta $h(t) = f(\gamma(t))$.

a) Determine $h(t)$.

b) Calcule $h'(t)$ diretamente da função h encontrada no item (a) e verifique que de fato $h'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}\,'(t)$.

c) Mostre que $h(t)$ é a imagem da função f dos pontos pertencentes à circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

d) Conhecendo o gráfico de f, como você faria para esboçar a imagem da função $\beta(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t, h(t))$, $t \in \mathbb{R}$.

Solução:
a) Como $h(t) = f(\gamma(t))$, temos que

$$h(t) \quad = \quad f(\cos t,\ \operatorname{sen} t) = e^{\cos t\ \operatorname{sen} t}.$$

b) Calculando $h'(t)$ a partir da função encontrada no item (a), temos que

$$h'(t) \quad = \quad e^{\cos t\ \operatorname{sen} t}(-\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t).$$

Vamos verificar agora que $h'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}\,'(t)$. Como $f(x, y) = e^{xy}$ e $\gamma(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t)$, temos que $\nabla f(\gamma(t)) = (\ \operatorname{sen} t\ e^{\cos t\ \operatorname{sen} t}\ ,\ \cos t\ e^{\cos t\ \operatorname{sen} t})$ e $\vec{\gamma}'(t) = (-\operatorname{sen} t\ \ , \cos t)$. Desta forma, segue

$$\begin{aligned} h'(t) &= \nabla f(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) \\ &= \left(\ \operatorname{sen} t\ e^{\cos t\ \operatorname{sen} t}\ \ , \cos t\ e^{\cos t\ \operatorname{sen} t}\right) \cdot (-\operatorname{sen} t\ ,\ \cos t) \\ &= e^{\cos t\ \operatorname{sen} t}(-\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t). \end{aligned}$$

c) Vamos chamar de $Im_{Circ}(f)$ o conjunto imagem de f dos pontos pertencentes à circunferência $x^2 + y^2 = 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Isto é,

$$Im_c(f) = \{f(x, y) \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + y^2 = 1, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Sabemos que a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pode, na forma paramétrica, ser escrita como

$$(x, y) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} Circ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2=1, (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(\cos t,\ \operatorname{sen} t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Sendo assim, segue que

$$\begin{aligned} Im_{Circ} &= \{f(\cos t,\ \operatorname{sen} t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{h(t) \in \mathbb{R} \,|\, t \in \mathbb{R}\} \\ &= Im(h), \end{aligned}$$

uma vez que $h(t) = f(g(t)) = f(\cos t,\ \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$. Temos, portanto, que $h(t)$, $t \in \mathbb{R}$, é a imagem da função f dos pontos pertencentes à circunferência $x^2+y^2=1$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

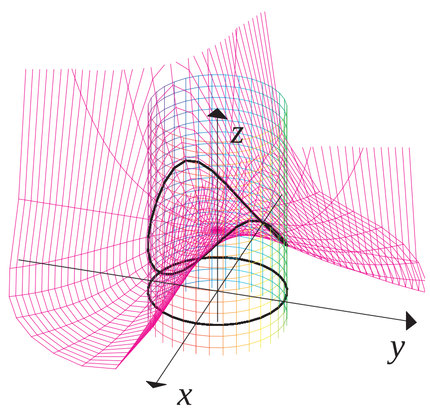
d) Pelo item anterior, temos que a curva C é a curva contida no gráfico da função f dada pela interseção do gráfico da função f com o cilindro $x^2+y^2=1$, uma vez que a coordenada z de um ponto arbitrário $(x,y,z) \in C$ é a imagem de f do ponto (x,y) que pertencente à circunferência $x^2+y^2=1$. De fato, a curva C, parametrizada pela função $\beta(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t, f(\cos t,\ \operatorname{sen} t))$, $t \in \mathbb{R}$, é tal que $x^2+y^2=1$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $(x(t)^2+y(t)^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + 1)$, e $z = f(\cos t,\ \operatorname{sen} t)$ e, lembrando que

$$Gr(f) = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\},$$

temos que $\beta(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t, f(\cos t,\ \operatorname{sen} t)) \in Gr(f)$, $t \in \mathbb{R}$. Além disso, conforme observado, um ponto (x,y,z) em C, i.e. é tal que $x(t) = \cos t$ e $x(t) = \operatorname{sen} t$, para algum $t \in \mathbb{R}$, de modo que $x^2+y^2=1$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, o que significa que $\beta(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t, f(\cos t,\ \operatorname{sen} t))$ pertecence ao plano $y = 2x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Sendo assim, $\beta(t)$, pertence á interseção do cilindro $x^2+y^2=1$ com o gráfico f, para todo $t \in \mathbb{R}$. Por outro lado, o conjunto de pontos da interseção do cilindro $x^2+y^2=1$ com o gráfico f é escrito como

$$\begin{aligned} & \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \cap \{(\cos t,\ \operatorname{sen} t, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} \\ = & \{(\cos t,\ \operatorname{sen} t, f(\cos t,\ \operatorname{sen} t)) \in \mathbb{R}^3 \,|\, t \in \mathbb{R}\} \\ = & \{\beta(t) \in \mathbb{R}^3 \,|\, t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Com isto, temos que C é a curva contida no gráfico da função f dada pela interseção do gráfico da função f com o cilindro $x^2+y^2=1$, esboçada abaixo.



$\heartsuit$

Exemplo 8.2.3: Seja $z(u) = f(e^{-u}, u^2)$, onde f é uma função diferenciável. Expresse z' em função das derivadas parciais de f.

Solução:

Opção 1: Vamos introduzir a função vetorial $g(u) = (e^{-u}, u^2)$, de modo que $z(u) = f(g(u)) = f(e^{-u}, u^2)$. Observe que f é diferenciável, por hipótese, e que a função vetorial g também diferenciável, uma vez que suas funções coordenadas são diferenciáveis. Desta forma, podemos aplicar a regra da cadeia. Portanto, temos que

$$z'(u) \ = \ \nabla f(g(u)) \cdot \vec{g}\,'(u).$$

Vamos supor que f é função das variáveis x e y. Sendo assim, como $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \ , \ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$, temos que

$$\nabla f(g(u)) = \nabla f(e^{-u}, u^2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(e^{-u}, u^2) \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(e^{-u}, u^2) \right).$$

Além disso, como $g(u) = (e^{-u}, u^2)$, segue que

$$\vec{g}\,'(u) = \left(\ -e^{-u} \ , \ 2u \ \right),$$

de modo que,

$$\begin{aligned} z'(u) &= \nabla(g(u)) \cdot \vec{g}\,'(u) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(e^{-u}, u^2) \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(e^{-u}, u^2) \right) \cdot \left(\ -e^{-u} \ , \ 2u \ \right) \\ &= -e^{-u} \, \frac{\partial f}{\partial x}(e^{-u}, u^2) + 2u \, \frac{\partial f}{\partial y}(e^{-u}, u^2). \end{aligned}$$

Opção 2:
Aplicando diretamente o resultado obtido em (3), temos que

$$\begin{aligned} z'(u) &= \frac{\partial f}{\partial x}(e^{-u}, u^2)(e^{-u})' + \frac{\partial f}{\partial y}(e^{-u}, u^2)(u^2)' \\ &= -e^{-u} \, \frac{\partial f}{\partial x}(e^{-u}, u^2) + 2u \, \frac{\partial f}{\partial y}(e^{-u}, u^2). \end{aligned}$$

$\heartsuit$

Exemplo 8.2.4: Seja $h(t) = f(e^{t^2}, \ \operatorname{sen} t)$, onde f é uma função de classe C^1.

a) Expresse $h'(t)$ em função das derivadas parciais de f.

b) Calcule $h'(0)$ supondo que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 5$.

Solução:

a) **Opção 1:** Vamos introduzir a função vetorial $g(t) = (e^{t^2},\ \operatorname{sen} t)$, de modo que $h(t) = f(g(t)) = f(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t)$. Como f é uma função de classe C^1, temos que f é diferenciável. Além disso, a função vetorial g também diferenciável, uma vez que suas funções coordenadas são diferenciáveis. Desta forma, podemos aplicar a regra da cadeia. Portanto, temos que

$$h'(t) \quad = \quad \nabla f(g(t)) \cdot \vec{g}\,'(t).$$

Vamos supor que f é função das variáveis x e y. Sendo assim, como $f'(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \ , \ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$, temos que

$$\nabla f(g(t)) = \nabla f(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t) \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t) \right).$$

Além disso, como $g(t) = (e^{t^2},\ \operatorname{sen} t)$, segue que

$$\vec{g}\,'(t) = \left(\ 2t\, e^{t^2} \quad , \quad \cos t \ \right),$$

de modo que,

$$\begin{aligned} h'(t) &= \nabla f(g(t)) \cdot \vec{g}\,'(t) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t) \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t) \right) \cdot \left(\ 2t\, e^{t^2} \quad , \quad \cos t \ \right) \\ &= 2t\, e^{t^2}\, \frac{\partial f}{\partial x}(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t) + \cos t\, \frac{\partial f}{\partial y}(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t). \end{aligned}$$

a) **Opção 2:**

Aplicando diretamente o resultado obtido em (2), temos que

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t)(e^{t^2})' + \frac{\partial f}{\partial y}(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t)(\ \operatorname{sen} t)' \\ &= 2t\, e^{t^2}\, \frac{\partial f}{\partial x}(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t) + \cos t\, \frac{\partial f}{\partial y}(e^{t^2},\ \operatorname{sen} t). \end{aligned}$$

b) Fazendo $t = 0$ na equação de $h'(t)$ encontrada acima, temos que

$$h'(0) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)(1).$$

Desta forma, supondo que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 5$, temos que

$$h'(0) \quad = \quad 5.$$

$\heartsuit$

Exemplo 8.2.5: Seja $h(t) = f(u(t^2), v(e^t))$, onde f, u e v são funções de classe C^1. Expresse $h'(t)$ em termos de u', v' e das derivadas parciais de f.

Solução:

a) **Opção 1:** Vamos introduzir a função vetorial $g(t) = (u(t^2), v(e^t))$, de modo que $h(t) = f(g(t)) = f(u(t^2), v(e^t))$. Como f, u e v são funções de classe C^1, temos que f, u e v são funções diferenciáveis. Além disso, a função vetorial g também diferenciável, uma vez que suas funções coordenadas são diferenciáveis, pois ambas são compostas de funções diferenciáveis. Desta forma, podemos aplicar a regra da cadeia. Portanto, temos que

$$h'(t) \;=\; \nabla f(g(t)) \cdot \vec{g}\,'(t).$$

Vamos supor que f é função das variáveis u e v. Sendo assim, como $\nabla f(u,v) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v) \;,\; \dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right)$, temos que

$$\nabla f(g(t)) = \nabla f(u(t^2), v(e^t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u(t^2), v(e^t)) \;,\; \frac{\partial f}{\partial v}(u(t^2), v(e^t)) \right).$$

Além disso, como $g(t) = (u(t^2), v(e^t))$, segue que

$$\vec{g}\,'(t) = \left(\; 2t\; u'(t^2) \;\;,\;\; e^t\; v'(e^t) \;\right),$$

de modo que,

$$\begin{aligned}
h'(t) &= \nabla f(g(t)) \cdot \vec{g}\,'(t) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u(t^2), v(e^t)) \;,\; \frac{\partial f}{\partial v}(u(t^2), v(e^t)) \right) \cdot \left(\; 2t\; u'(t^2) \;,\; e^t\; v'(e^t) \;\right) \\
&= 2t\; u'(t^2)\, \frac{\partial f}{\partial u}(u(t^2), v(e^t)) + e^t\; v'(e^t)\, \frac{\partial f}{\partial v}(u(t^2), v(e^t)).
\end{aligned}$$

a) **Opção 2:**

Aplicando diretamente o resultado obtido em (2) e supondo que f é função das variáveis u e v, i.e. $f = f(u,v)$, temos que

$$\begin{aligned}
h'(t) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u(t^2), v(e^t))(u(t^2))' + \frac{\partial f}{\partial v}(u(t^2), v(e^t))(v(e^t))' \\
&= 2t\; u'(t^2)\, \frac{\partial f}{\partial u}(u(t^2), v(e^t)) + e^t\; v'(e^t)\, \frac{\partial f}{\partial v}(u(t^2), v(e^t)).
\end{aligned}$$

$\heartsuit$

Exemplo 8.2.6: Seja

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, tal que $f(1,2) = -2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 3$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 4$. Suponha que a curva C, imagem da função $\gamma(t) = (t^2, 3t-1, z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, está contida no gráfico de f.

a) Determine $z(t)$.

b) Determine a equação da reta tangente à curva C no ponto $\gamma(1)$.

Solução:

a) Sabemos que o gráfico de f é o conjunto dado por $Gr(f) = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Em outras palavras, o gráfico de f é o conjunto de pontos em $\mathbb{R}^3$ que obedece a equação $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Além disso, a imagem de γ é o conjunto dado por $Im(\gamma) = \{(t^2, 3t-1, z(t))) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$. Desta forma, como, por hipótese, a imagem de γ está contida no gráfico de f para todo t, quando $x(t) = t^2$, $y(t) = 3t-1$, devemos ter $z(t) = f(x(t), y(t)) = f(t^2, 3t-1)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Já vimos que a equação da reta tangente à curva C no ponto $\gamma(1)$ é dada por

$$(x,y,z) = \gamma(1) + \lambda \vec{\gamma}\,'(1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Observe que $\gamma(1) = (1,2,z(1)) = (1,2,f(1,2)) = (1,2,-2)$ e que $\vec{\gamma}\,'(t) = (2t, 3, z'(t))$, de modo que $\vec{\gamma}\,'(1) = (2,3,z'(1))$. Devemos portanto, determinar $z'(t)$ para achar a equação pedida. Para isto, vamos introduzir a função vetorial $g(t) = (t^2, 3t-1)$, de modo que $z(t) = f(g(t)) = f(t^2, 3t-1)$. Como f é uma função de classe C^1, temos que f é diferenciável. Além disso, a função vetorial g também diferenciável, uma vez que suas funções coordenadas são diferenciáveis. Desta forma, podemos aplicar a regra da cadeia. Portanto, temos que

$$h'(t) \;=\; \nabla f(g(t)) \cdot \vec{g}\,'(t).$$

Sendo assim, como $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \;,\; \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$, temos que

$$\nabla f(g(t)) = \nabla f(t^2, 3t-1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t-1) \;,\; \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t-1) \right).$$

Além disso, como $g(t) = (t^2, 3t-1)$, segue que

$$\vec{g}\,'(t) = (\; 2t \;,\; 3 \;),$$

de modo que,

$$\begin{array}{rcl} h'(t) & = & \nabla f(g(t)) \cdot \vec{g}\,'(t) \\ & = & \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t-1) \;,\; \dfrac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t-1) \right) \cdot (\; 2t \;,\; 3 \;) \\ & = & 2t\, \dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t-1) + 3\, \dfrac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t-1). \end{array}$$

Alternativamente, para determinar z', podemos aplicar diretamente o resultado obtido em (2). Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t-1)(t^2)' + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t-1)(3t-1)' \\ &= 2t\,\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t-1) + 3\,\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t-1), \end{aligned}$$

o que leva a

$$z'(1) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(1,2).$$

Substituindo então os valores dados na equação acima, ficamos com

$$z'(1) = 2.3 + 3.4 = 18.$$

Temos portanto, que

$$\vec{\gamma}\,'(1) = (2, 3, z'(1)) = (2, 3, 18).$$

Sendo assim, a equação da reta tangente à curva C no ponto $\gamma(1) = (1, 2, -2)$ é dada por

$$(x, y, z) = (1, 2, -2) + \lambda(2, 3, 18), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

♡

Exemplo 8.3.7: Seja f uma função de classe C^1 e defina a função g como $g(x) = f(x, f(x, x))$. Determine $g'(x)$.

Solução: Vamos introduzir a função vetorial $h(x) = (x, f(x, x))$, de modo que $g(x) = f(h(x)) = f(x, f(x, x))$. Como f é uma função de classe C^1, temos que f é uma função diferenciável. Além disso, a função vetorial h também diferenciável, uma vez que suas funções coordenadas são diferenciáveis. Desta forma, podemos aplicar a regra da cadeia. Portanto, temos que

$$g'(x) = \nabla f(h(x)) \cdot \vec{h}\,'(x).$$

Vamos supor que f é função das variáveis x e y. Sendo assim, como $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$, temos que

$$\nabla f(h(x)) = \nabla f(x, f(x, x)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, f(x, x)) \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, f(x, x)) \right).$$

Além disso, como $h(x) = (x, f(x, x))$, segue que

$$\vec{h}\,'(x) = \left(1 \ , \ \frac{d}{dx}(f(x, x)) \right).$$

Para calcular $\dfrac{d}{dx}(f(x,x))$, vamos definir a função $g_1(x) = f(x,x)$ e a função vetorial $h_1(x) = (x,x)$, de modo que $g_1(x) = f(h_1(x)) = f(x,x)$ e repetir o processo. Sendo assim, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f(x,x)) &= g_1'(x) = \nabla f(h_1(x)) \cdot \vec{h_1}\,'(x) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) \right) \cdot (\ 1\ ,\ 1\ ) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x).
\end{aligned}$$

Desta forma, segue que

$$\begin{aligned}
\vec{h}\,'(x) &= \left(1\ ,\ \frac{d}{dx}(f(x,x)) \right) \\
&= \left(1 \ ,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) \right).
\end{aligned}$$

Tendo determinado $\vec{h}\,'$, vamos voltar a calcular g'.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \nabla f(h(x)) \cdot \vec{h}\,'(x) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, f(x,x)) \ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, f(x,x)) \right) \cdot \left(1\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) \right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x, f(x,x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, f(x,x)) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) \right).
\end{aligned}$$

Alternativamente, para determinar g', podemos aplicar diretamente o resultado obtido em (2). Vamos supor que f é função das variáveis x e y. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, f(x,x))(x)' + \frac{\partial f}{\partial y}(x, f(x,x)) \frac{d}{dx}(f(x,x)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x, f(x,x))(1) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, f(x,x)) \frac{d}{dx}(f(x,x)).
\end{aligned}$$

Para calcular $\dfrac{d}{dx}(f(x,x))$, vamos aplicar (2) novamente e repetir o processo. Desta forma, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f(x,x)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,x)(x)' + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x))(x)' \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x,x)(1) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x))(1).
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, f(x,x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, f(x,x)) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) \right).$$

$\heartsuit$

Exemplo 8.3.8: Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e seja g a função definida como $g(t) = t^2 \dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3)$. Expresse $g'(t)$ em função das derivadas parciais de f.

Solução: Como estamos diante do produto de duas funções que dependem de t, vamos aplicar em primeiro lugar a regra da derivada do produto. Neste caso, temos que

$$g'(t) \;=\; 2t\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + t^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3)\right).$$

Temos assim que determinar $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3)\right)$. Para isto,vamos introduzir a função vetorial $g(t) = (t^2, t^3)$ e a função $F = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, de modo que $h(t) = F(g(t)) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3)$. Como f é uma função de classe C^2, temos que $F = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ é uma função de classe C^1 e, portanto, diferenciável. Além disso, a função vetorial g também diferenciável, uma vez que suas funções coordenadas são diferenciáveis. Desta forma, podemos aplicar a regra da cadeia. Portanto, temos que

$$h'(t) \;=\; \nabla F(g(t)) \cdot \vec{g}\,'(t).$$

Sendo assim, como $\nabla F(x, y) = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)\ ,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$, temos que

$$\begin{aligned}
\nabla F(g(t)) &= \nabla F(t^2, t^3) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(t^2, t^3)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3) \right) \\
&= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)(t^2, t^3)\ ,\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)(t^2, t^3) \right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^2, t^3)\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(t^2, t^3) \right).
\end{aligned}$$

Além disso, como $g(t) = (t^2, t^3)$, segue que

$$\vec{g}\,'(t) = (\ 2t\ ,\quad 3t^2\ ),$$

de modo que,

$$\begin{aligned}
h'(t) &= \nabla F(g(t)) \cdot \vec{g}\,'(t) \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^2, t^3)\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(t^2, t^3) \right) \cdot (\ 2t\ ,\quad 3t^2\ ) \\
&= 2t\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^2, t^3) + 3t^2\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(t^2, t^3).
\end{aligned}$$

Desta forma, segue que

$$g'(t) \;=\; 2t\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + t^2 \left(2t\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^2, t^3) + 3t^2\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(t^2, t^3)\right).$$

Alternativamente, para determinar $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2,t^3)\right)$, podemos aplicar diretamente o resultado obtido em (2). Desta forma, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t^2,t^3)\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)(t^2,t^3)(t^2)' + \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)(t^2,t^3)(t^3)'\\ &= 2t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^2,t^3) + 3t^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(t^2,t^3).\end{aligned}$$

Desta forma, segue que

$$g'(t) = 2t\frac{\partial f}{\partial x}(t^2,t^3) + t^2\left(2t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^2,t^3) + 3t^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(t^2,t^3)\right).$$

♡

Exemplo 8.3.9: Seja f uma função de classe C^2 e defina a função g como $g(t) = f(3t,e^t)$. Determine $g''(t)$.

Solução: Primeiro vamos calcular $g'(t)$. Como f é uma função de classe C^2, temos que f é diferenciável (pois f é de classe C^1). Além disso, definindo a função vetorial h como $h(t) = (3t,e^t)$, temos que h também é diferenciável, uma vez que suas funções coordenadas são diferenciáveis. Desta forma, podemos aplicar a regra da cadeia. Como já estamos bem experientes, vamos aplicar diretamente o resultado obtido em (2). Supondo que f é função das variáveis x e y, temos que

$$\begin{aligned}g'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(3t,e^t)(3t)' + \frac{\partial f}{\partial y}(3t,e^t)(e^t)'\\ &= 3\,\frac{\partial f}{\partial x}(3t,e^t) + e^t\frac{\partial f}{\partial y}(3t,e^t).\end{aligned}$$

Derivando mais uma vez a função g, temos que

$$g''(t) = 3\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(3t,e^t)\right) + e^t\frac{\partial f}{\partial y}(3t,e^t) + e^t\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(3t,e^t)\right).$$

Como f é uma função de classe C^2, temos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são funções de classe C^1 e, portanto, diferenciáveis. Desta forma, podemos aplicar novamente a regra da cadeia para ambas as derivadas. Calculando separadamente $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(3t,e^t)\right)$ e $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(3t,e^t)\right)$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(3t,e^t)\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)(3t,e^t)(3t)' + \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)(3t,e^t)(e^t)'\\ &= 3\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3t,e^t) + e^t\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(3t,e^t)\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(3t,e^t)\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)(3t,e^t)(3t)' + \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)(3t,e^t)(e^t)' \\
&= 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3t,e^t) + e^t\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3t,e^t).
\end{aligned}
$$

Segue portanto que

$$
\begin{aligned}
g''(t) &= 3\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(3t,e^t)\right) + e^t\frac{\partial f}{\partial y}(3t,e^t) + e^t\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(3t,e^t)\right) \\
&= 3\,\left(3\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3t,e^t) + e^t\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(3t,e^t)\right) + e^t\frac{\partial f}{\partial y}(3t,e^t) + e^t\left(3\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3t,e^t) + e^t\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3t,e^t)\right).
\end{aligned}
$$

Como f é de classe C^2, temos que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Desta forma, segue que

$$
g''(t) = 9\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3t,e^t) + 6e^t\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(3t,e^t) + e^t\frac{\partial f}{\partial y}(3t,e^t) + e^{2t}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3t,e^t).
$$

♡